Opción A

1A.- Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales, $\begin{cases} x + y = 1 \\ ax + z = 0 \\ x + (1+a)y + az = a+1 \end{cases}$, determina el parámetro "a", y resuelve siempre que sea posible, para que el sistema:.

(a) tenga una única solución. [4 puntos]
(b) tenga infinitas soluciones. [4 puntos]
(b) no tenga solución. [2 puntos]

Solución

(a), (b) y (c)

Discutimos el sistema y luego lo resolvemos.

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & a+1 & a \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & a+1 & a & a+1 \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada.

En A como $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & a+1 & a \end{vmatrix} \begin{matrix} C_1-C_2 \\ = \\ \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ -a & a+1 & a \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{matrix} = 0 - 1(a^2 + a) + 0 = -a^2 - a$.

Si $|A| = 0 \rightarrow -a^2 - a = a\cdot(-a - 1) = 0$, de donde $a = 0$ y $a = -1$.

Si $a \neq 0$ y $a \neq -1$, rango(A) = rango(A*) = 3 = número de incógnitas, por el Teorema de Rouche, el **sistema es compatible y determinado y tiene solución única.**

Si a = 0, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0$, rango(A) = 2.

En A* como $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$, por tener dos filas iguales luego, rango(A*) = 2.

Como **rango(A) = rango(A*) = 2** < número de incógnitas, por el Teorema de Rouche, el **sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones**, (**más de una**).

Si a = -1, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1 = 1 \neq 0$, rango(A) = 2.

En A* como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, por tener dos columnas iguales luego, rango(A*) = 2.

Como **rango(A) = rango(A*) = 2** < número de incógnitas, por el Teorema de Rouche, el **sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones**, (**más de una**).

Lo resolvemos, pues tiene solución sea cual sea "a"

Hemos visto antes que para **a = 0**, el rango es 2, por tanto necesito dos ecuaciones, las dos primeras:
$\begin{cases} x + y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$, de donde si $y = m \in R$, **la solución del sistema es (x,y,z) = (1 - m, m, 0) con $m \in$ R.**

Hemos visto antes que para **a = -1**, el rango es 2, por tanto necesito dos ecuaciones, las dos primeras:
$\begin{cases} x + y = 1 \\ -x + z = 0 \end{cases}$, de donde si $z = n \in R$, $x = n$ e $y = 1 - n$, y **la solución del sistema en este caso es:**

(x,y,z) = (n, 1 - n, n) con $n \in$ R.

Para a ≠ 0 y a ≠ -1, lo resolveremos por el Teorema de Cramer.

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ a+1 & a+1 & a\end{vmatrix}}{-a^2-a}=\frac{0}{-a^2-a}=0\ ;\quad y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ a & 0 & 1\\ 1 & a+1 & a\end{vmatrix}}{-a^2-a}=\frac{-a^2-a}{-a^2-a}=1;\quad y\quad z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & 0 & 0\\ 1 & a+1 & a+1\end{vmatrix}}{-a^2-a}=\frac{0}{-a^2-a}=0$$

$$A^* = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ a & 0 & 1 & 0\\ 1 & a+1 & a & a+1\end{pmatrix}$$

$\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ a+1 & a+1 & a\end{vmatrix}$ = 0, por tener dos columnas iguales. $\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ a & 0 & 1\\ 1 & a+1 & a\end{vmatrix}$ Adjuntos primera fila = $-a^2-a$, pues |A|..

$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & 0 & 0\\ 1 & a+1 & a+1\end{vmatrix}$ = 0, por tener dos columnas iguales.

La solución del sistema es (x, y, z) = (0, 1, 0).

2A.- Considera la función f : R → R definida por $f(x) = x^3 – 3x$.

(a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisas x = -1. (2 puntos)

(b) Haz un esbozo de la gráfica de y = f(x) y calcula los puntos de corte con los ejes, los extremos relativos y el comportamiento de la función en el infinito. (4 puntos)

(c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función dada y la recta y = 2. (4 puntos)

Solución

(a)

Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisas x = -1.

La recta tangente en x = -1 es "y – f(-1) = f '(-1)(x + 1).

$f(x) = x^3 – 3x$; $f'(x) = 3x^2 – 3$.

Tenemos f(-1) = 2, f '(-1) = 0, luego la recta tangente es: **y - 2 = 0·(x + 1) → y = 2.**

(b)

Haz un esbozo de la gráfica de y = f(x) y calcula los puntos de corte con los ejes, los extremos relativos y el comportamiento de la función en el infinito.

Cortes con los ejes:

Para x = 0, f(0) = 0. *Punto (0,0).*

Para f(x) = 0, $x^3 - 3x = 0 = x\cdot(x^2 - 3)$, de donde x = 0 (ya obtenido) y $x^2 = 3$, de donde x = ±√(3), y los **puntos** de corte son ***(-√(3), 0) y (+√(3), 0).***

Me están pidiendo la monotonía y la curvatura, que es el estudio de f '(x) y de f ''(x)

$f(x) = x^3 - 3x$; $f'(x) = 3x^2 - 3$.

Si f '(x) = 0 → $3x^2 - 3 = 0$, de donde $x^2 = 1$, de donde x = ±1, *que serán los posibles extremos relativos*.

Como f '(-2) = 9 > 0, **luego f(x) es estrictamente creciente** $(\nearrow)$ **en (-∞, -1).**

Como f '(0) = -3 < 0, **luego f(x) es estrictamente decreciente** $(\searrow)$ **en (-1, 1).**

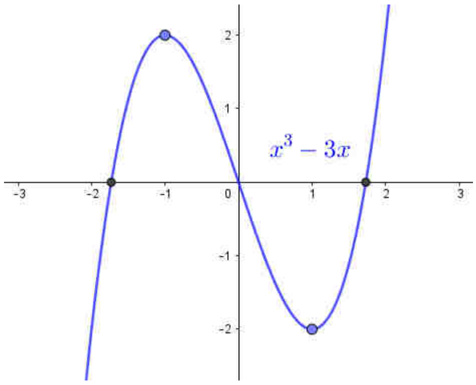
Como f '(2) = 9 > 0, **luego f(x) es estrictamente creciente** $(\nearrow)$ **en (1, +∞).**

Por definición en x = -1 hay un máximo relativo relativo que vale f(-1) = 2.
Por definición en x = 1 hay un mínimo relativo relativo que vale f(1) = -2.

Veamos el comportamiento en ±∞.

Tenemos $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(-x) = \lim_{x\to+\infty} (-x^3+3x) = \lim_{x\to+\infty} (-x^3) = -\infty$. **y** $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^3+3x) = \lim_{x\to+\infty} (x^3) = +\infty$.

Con los datos anteriores un esbozo de la gráfica es:

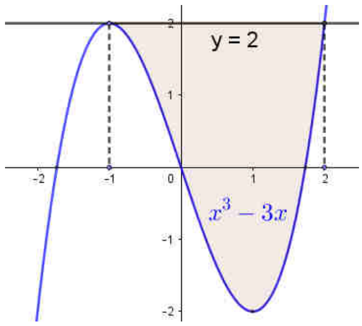


(c)
Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función dada y la recta y = 2.

Resolvemos la ecuación f(x) = y, $x^3 – 3x = 2$, $x^3 – 3x – 2 = 0$ (vemos que x = -1 es solución)
Utilizando Ruffini

	1	0	-3	-2
- 1		-1	1	+2
	1	-1	-2	**0**

De $x^2 - x - 2 = 0$, $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{1 \pm 3}{2}$, es decir las gráficas se cortan en x = -1 y x = 2.



Si observamos la gráfica, nos piden:

Área = $\int_{-1}^{2}(2 - x^3 + 3x)dx = \left[2x - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{3x^2}{2}\right]_{-1}^{2}$ = (4 - 4 + 6) - (-2 - 1/4 + 3/2) u^2 **= 27/4 u^2 = 6’75 u^2**.

3A.- Se considera el punto P = (2, -1 ,1) y la recta r dada por $r \equiv \begin{cases} 2x - 3y + 4z - 1 = 0 \\ x + 2y - 3z - 2 = 0 \end{cases}$

(a) Calcula la ecuación continua de la recta r. [2 puntos]
(b) Calcular la ecuación del plano π, perpendicular a la recta r que pasa por el punto P. [2 puntos]
(c) Calcular el punto, Q intersección del plano π y la recta r. [3 puntos]
(d) De todas las rectas que pasa por el punto P = (2, -1 ,1), calcula la recta que corta perpendicularmente a la recta r. [3 puntos]

Solución

(a)
Calcula la ecuación continua de la recta r.

De $r \equiv \begin{cases} 2x - 3y + 4z - 1 = 0 \text{ (E1-2E2)} \\ x + 2y - 3z - 2 = 0 \end{cases} \approx \begin{cases} -7y + 10z + 3 = 0 \\ x + 2y - 3z - 2 = 0 \end{cases}$. Tomando z = m ∊ R, y = 3/7 + (10/7)m y entrando en la 2ª; x + 2((3/7 + (10/7)m) – 3m = 0 → x = - 6/7 + 1/7(m), tenemos que un punto de la recta es (-6/7, 3/7, 0) y un vector director (1/7, 10/7, 1), otro proporcional es **u** = (1, 10, 7).

La ecuación de la recta en forma continua es $r \equiv \dfrac{x + 6/7}{1} = \dfrac{x - 3/7}{10} = \dfrac{z}{7}$

(b)
Calcular la ecuación del plano π, perpendicular a la recta r que pasa por el punto P.

Como el plano es perpendicular a la recta el vector normal al plano **n** es el director de la recta **u** = (1, 10, 7).
$\pi \equiv$ **PX•u =** (x-2, y+1, z-1)•(1, 10, 7) **= 0 = x + 10y + 7z + 1 = 0.**
(c)
Calcular el punto, Q intersección del plano π y la recta r.

Resolvemos el sistema de la recta en implícita y del plano perpendicular:11/10, 0, -3/10

$$\begin{cases} x + 10y + 7z + 1 = 0 \\ 2x - 3y + 4z - 1 = 0 \ (E_2-2E_1) \\ x + 2y - 3z - 2 = 0 \ (E_3-E_1) \end{cases} \approx \begin{cases} x + 10y + 7z + 1 = 0 \\ -23y - 10z - 3 = 0 \\ -8y - 10z - 3 = 0 \ (E_3-E_2) \end{cases} \approx \begin{cases} x + 10y + 7z + 1 = 0 \\ -23y - 10z - 3 = 0 \\ -8y - 10z - 3 = 0 (E_3-E_2) \end{cases} \approx$$

$\begin{cases} x + 10y + 7z + 1 = 0 \\ -23y - 10z - 3 = 0 \\ 15y + 0 = 0 \end{cases}$, de donde y = 0, z = -3/10 y x = -1 - 0 + 21/10 = 11/10, y **el punto de corte es:**
Q = (11/10, 0, -3/10).
(d)
De todas las rectas que pasa por el punto P = (2, -1 ,1), calcula la recta que corta perpendicularmente a la recta r.

La recta que piden está contenida en el plano π por tanto pasa por el punto Q, como también pasa por el punto P, tomamos como punto el P=(2,-1,1), y como vector directo uno proporcional a **PQ**=(-9/10,1,-13/10), es decir el **w** = (9, -10, 13)

La recta pedida en forma paramétrica es $\begin{cases} x = 2 + 9m \\ y = -1 - 10m, \text{ con } m \in R. \\ z = 1 + 13m \end{cases}$ **.**

4A.- El número de horas de vida de una cierta bacteria (tipo A) se distribuye según una normal de media 110 horas y desviación típica de 0’75 horas. Calcula la probabilidad de que, escogiendo al azar una bacteria:
(a) su número de horas de vida sobrepase las 112’25 horas. (4 puntos)
(b) su número de horas de vida sea inferior a 109’25 horas. (4 puntos)
(c) De otra bacteria (tipo B) se sabe que el número de horas de vida se distribuye según una normal de media 110 horas, pero se desconoce su desviación típica. Experimentalmente se ha comprobado que la probabilidad de que una bacteria tipo B viva más de 125 horas se 0’1587.
Calcula la desviación típica de la distribución del número de horas de vida de las bacterias tipo B. (2 puntos)
Solución
(a)
su número de horas de vida sobrepase las 112’25 horas. (4 puntos)

X sigue una normal N(μ, σ) = N(110, 0’75)

Nos piden p(X > 112’5) = {tipificando} = $p\left(Z \le \frac{112'5 - 110}{0'75}\right)$ = p(Z > 3’33) = {suceso contrario} =

= 1 - p(Z ≤ 3’33) = 1 – 0’9996 **= 0’0004**.

(b)
su número de horas de vida sea inferior a 109’25 horas.

Nos piden p(X ≤ 109’25) = {tipificando} = $p\left(Z \le \frac{109'25 - 110}{0'75}\right)$ = p(Z ≤ -1) = {simetría} = 1 - p(Z ≤ 1) =

= 1 – 0’8413 **= 0’1587**.
(c)
De otra bacteria (tipo B) se sabe que el número de horas de vida se distribuye según una normal de media 110 horas, pero se desconoce su desviación típica. Experimentalmente se ha comprobado que la probabilidad de que una bacteria tipo B viva más de 125 horas se 0’1587.
Calcula la desviación típica de la distribución del número de horas de vida de las bacterias tipo B.

Y sigue una normal N(μ, σ) = N(110, σ)

Nos dicen que p(Y > 125) = 0'1587 = {suceso contrario} = 1 - p(Y ≤ 125), de donde p(Y ≤ 125) = 1 – 0'1587 = 0'8413 **=** {tipificando} = $p\left(Z \le \frac{125 - 110}{\sigma}\right) = p\left(Z \le \frac{15}{\sigma}\right)$. Hemos visto antes que la probabilidad 0'8413 viene del valor z = 1 de la normal N(0, 1), por tanto 15/σ = 1, de donde **la desviación típica es σ = 15.**

Opción B

1B.- Una empresa tiene tres minas: A, B y C, y en cada una, el mineral extraído contiene los elementos químicos: níquel (Ni), cobre (Cu) y hierro (Fe), en diferente concentración. Las concentraciones son:
Mina A: Ni (1%), Cu (2%), Fe (3%),
Mina B: Ni (2%), Cu (5%), Fe (7%),
Mina C: Ni (1%), Cu (3%), Fe (1%).
Para obtener 7 toneladas de níquel, 18 de cobre y 16 de hierro en total, cuántas toneladas de mineral se deben extraer de cada mina?
(a) Plantea un sistema de ecuaciones que interprete el enunciado. (4 puntos)
(b) Clasifique el sistema. (2 puntos)
(c) Resuelve el sistema. (4 puntos)
Solución
(a)
Plantea un sistema de ecuaciones que interprete el enunciado.

x = Toneladas de la mina A.
y = Toneladas de la mina B.
z = Toneladas de la mina C.

Mirando las concentraciones de **níquel** de las tres minas, y el total a obtener → 0'01x + 0'02y + 0'01z = 7.

Mirando las concentraciones de **cobre** de las tres minas, y el total a obtener → 0'02x + 0'05y + 0'03z = 18.

Mirando las concentraciones de **hierro** de las tres minas, y el total a obtener → 0'03x + 0'07y + 0'01z = 16.

Multiplicando por 100 tenemos el sistema: $\begin{cases} x + 2y + z = 700 \\ 2x + 5y + 3z = 1800 \\ 3x + 7y + z = 1600 \end{cases}$

(b) y (c).
Clasifique el sistema. Resuelve el sistema.

Resolvemos el sistema por Gauss y de paso lo clasificamos.
Si con las transformaciones elementales obtenemos un sistema reducido con tres ecuaciones y tres incógnitas, tenemos solución única y es un sistema compatible y determinado.

$\begin{cases} x + 2y + z = 700 \\ 2x + 5y + 3z = 1800 \; (E_2\text{-}2E_1) \\ 3x + 7y + z = 1600 \;\; (E_3\text{-}3E_1) \end{cases} \approx \begin{cases} x + 2y + z = 700 \\ \quad y + z = 400 \\ \quad y - 2z = -500 \; (E_3\text{-}E_2) \end{cases} \approx \begin{cases} x + 2y + z = 700 \\ \quad y + z = 400 \\ \quad -3z = -900 \end{cases}$, con lo cual es un sistema compatible y determinado y tiene solución única.

De la tercera ecuación z = 300, de la segunda y = 100 y de la primera x +200+ 300 = 700, de donde x= 200, es **decir la solución del sistema es (x, y, z) = (200, 100, 300), por tanto hay que sacar 200 toneladas de la mina A, 100 toneladas de la mina B y 300 toneladas de la mina C.**

x = Precio de un libro = 38 €. y = Precio de una calculadora = 15 €. z = Precio de una estuche = 4 €.

2B.- Considera la función $f(x) = \frac{3}{x^2 - x}$.
(a) Calcula su dominio y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento. (3 puntos)
(b) Calcula una primitiva cualquiera de f(x). (4 puntos)
(c) Calcula el área delimitada por la gráfica de la función y = f(x), el eje OX y las rectas x = 2 y x = 3.
Solución
(a)
Calcula su dominio y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

Como es un cociente el dominio es R menos las soluciones del denominador igualado a cero.
De $x^2 - x = 0 = x\cdot(x-1)$, tenemos x = 0 y x = 1, luego **el dominio es R – {0, 1}.**

Me están pidiendo la monotonía, que es el estudio de f '(x).

$$f(x) = \frac{3}{x^2 - x};\ f'(x) = \frac{0 - 3\cdot(2x-1)}{(x^2-x)^2}.$$

Si $f'(x) = 0 \rightarrow -3\cdot(2x-1) = 0$, *luego x = 1/2 que será el posible extremo relativo*.

Como f '(-1) = 9/(+) > 0, **luego f(x) es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en (-∞, 1/2) – {0}.**

Como f '(2) = -9 < 0, **luego f(x) es estrictamente decreciente $(\searrow)$ en (1/2, +∞) – {1}.**

Por definición en x = 1/2 hay un máximo relativo relativo que vale f(1/2) = 3/(1/4 – 1/2) = -12.

(b)
Calcula una primitiva cualquiera de f(x).

Una primitiva es $I = \int \frac{3dx}{x^2-x} = \int \frac{3dx}{x\cdot(x-1)} = \int \frac{A}{x}dx + \int \frac{B}{x-1}dx = A\cdot\ln|x| + B\cdot\ln|x-1| + K = \{+++\} =$

$= -3\cdot\ln|x| + 3\cdot\ln|x-1| + K$

{+++} Calculamos A y B

$$\frac{3}{x\cdot(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = \frac{A\cdot(x-1)+B(x)}{x\cdot(x+1)}$$

Igualando numeradores:
3 = A(x-1) + B(x). Sustituimos "x" por el valor de las raíces del denominador.
Para x = 0, 3 = -A → *A = -3.* Para x = 1, 3 = B → *B = 3.*

(c)
Calcula el área delimitada por la gráfica de la función y = f(x), el eje OX y las rectas x = 2 y x = 3.

Área = $\left|\int_2^3 \frac{3dx}{x^2-x}\right| = \left|\left[-3\cdot\ln|x| + 3\cdot\ln|x-1|\right]_2^3\right| = |\,(-3\cdot\ln(3) + 3\cdot\ln(2)) - (-3\cdot\ln(2) + 3\cdot\ln(1))|\ u^2$ **=**

= | 6·ln(2) - 3·ln(3) | $u^2 \cong$ | 0'863 | $u^2 \cong$ 0'863 u^2.

3B.- Dada la recta r y el plano π, $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{-1}$, $\pi \equiv 3x - my + z = 1$, se pregunta si existe algún valor del parámetro m para el cual
(a) el plano y la recta son paralelos. (4 puntos)
(b) o bien, el plano contiene a la recta. (3 puntos)
(c) o bien, el plano y la recta se cortan exactamente en un punto. (3 puntos)
En cada caso, si existe, calcúlalo.

Solución

(a)
el plano y la recta son paralelos. (4 puntos)

De la recta r un vector directo es **u** = (2, 3, -1) y del plano π un vector normal **n** = (3, -m, 1).
El plano y la e3ecta son paralelos si el producto escalar **u•n** es cero.
De **u•n** = 0 = (2, 3, -1)•(3, -m, 1) = 6 – 3m – 1 = 0, de donde **m = 5/3 para que sean paralelos.**

(b)
o bien, el plano contiene a la recta. (3 puntos)

Para que la recta esté contenida en el plano, tienen que ser paralelos (m = 5/3) y el punto de la recta A = = (1, -1, -2) tiene que verificar la ecuación del plano.

Como de 3(1) – (5/3)(-1) + (-2) = 1 tenemos 8/3 = 1, lo cual es absurdo y **la recta no está contenida en el plano.**

(c)
o bien, el plano y la recta se cortan exactamente en un punto.

Para m = 5/3 la recta es paralela y no está contenida en el plano, **luego para m ≠ 5/3 la recta corta al plano en un único punto.**

Ponemos la recta en vectorial (parámetro b), sustituimos en el plano, despejamos b y ya tenemos el punto de corte.

$r \equiv (x, y, z) = (1 + 2b, -1 + 3b, -2 – b)$ con $b \in R$.

$3(1 + 2b) – m(-1 + 3b) + (-2 – b) = 1 \rightarrow 3 + 6b + m – 3mb – 2 – b = 1 \rightarrow b(5 – 3m) = -m$, de donde tenemos $b = -m/(5 – 3m)$ que tiene sentido porque $m \neq 5/3$.
Luego $x = 1 + 2(-m/(5 – 3m)) = (5 – 3m - 2m)/(5 – 3m)) = (5 – 5m)/(5 – 3m)$

Luego $y = -1 + 3(-m/(5 – 3m)) = (-5 + 3m - 3m)/(5 – 3m)) = -5/(5 – 3m)$

Luego $z = -2 - (-m/(5 – 3m)) = (-10 + 6m + m)/(5 – 3m)) = (-10 + 7m)/(5 – 3m)$

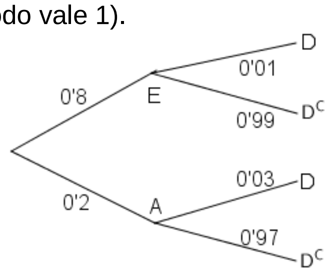
El punto de corte de la recta y el plano para $m \neq 5/3$ es:
$(x, y, z,) = ((5 - 5m)/(5 - 3m), -5/(5 - 3m), (-10 + 7m)/(5 - 3m))$

4B.- Una empresa de fabricación de impresoras tiene dos centros de producción, la fábrica europea (E) y la fábrica asiática (A). El 1% de las impresoras de la fábrica E y el 3% de las impresoras de la fábrica A se producen con un defecto. El mercado de un determinado país se abastece de impresoras procedentes de la fábrica E en un 80%, mientras que el resto proviene y de la fábrica A.
(a) ¿Cuál es la probabilidad de que una impresora de cualquier país tenga el defecto? (4 puntos)
(b) Si el país tiene, aproximadamente, dos millones de impresoras fabricadas por esta empresa, cuántas tendrán el defecto? (2 puntos)
(c) Si se elige al azar una impresora de este país y resulta ser una impresora defectuosa, cuál es la probabilidad de que provenga de la fábrica E? (4 puntos)
Solución
(a)
¿Cuál es la probabilidad de que una impresora de cualquier país tenga el defecto?

Llamemos E, A, D, y D^C, a los sucesos siguientes, “fabrica europea", “fabrica asiática", "impresora con defecto" y "impresora sin defecto", respectivamente.

Datos del problema: p(E) = 80% = 0’8; p(D/E) = 1% = 0’01; p(D/A) = 3% = 0’03, ...

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



Por el teorema de la Probabilidad Total:
Me piden **p(impresora con defecto) = p(D) =** p(E).p(D/E) + p(A).p(D/A) =
= (0’8)·(0’01) + (0’2)·(0’03) **= 7/500 = 0’014**.
(b)
Si el país tiene, aproximadamente, dos millones de impresoras fabricadas por esta empresa, cuántas tendrán el defecto?

Me piden **número de impresoras defectuosas** = (número de impresoras)·(probabilidad de estar defectuosa) = (2000000)·(0’014) **= 28000.**
c)
Hemos conectado por redes sociales con una persona que nos ha confesado estar en paro ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?
(c)
Si se elige al azar una impresora de este país y resulta ser una impresora defectuosa, cuál es la probabilidad de que provenga de la fábrica E? (4 puntos)

Me piden **p(venga de la fábrica E si es defectuosa) = P(E/D)**
Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\mathbf{p(E/D) =} \frac{p(E \cap D)}{p(D)} = \frac{p(E)\cdot p(D/E)}{0'014} = \frac{(0'8)\cdot(0'01)}{0'014} \mathbf{= 4/7 \cong 0'57143}.$$